III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

VI. osztály

1. feladat. Legyen $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^8$.

a) Igazold, hogy A osztható 15-tel!

b) Igazold, hogy A nem osztható 31-gyel!

c) Igazold, hogy $(x+2)$ osztható 3-mal, ahol $\dfrac{x-1}{0,8} = A$.

Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. a) Vegyük észre, hogy

$$5 + 5^2 = 5 + 25 = 30 = 2 \cdot 15. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} A &= (5+5^2) + (5^3+5^4) + \cdots + (5^7+5^8) \\ &= (5+5^2) + 5^2 \cdot (5+5^2) + \cdots + 5^6 \cdot (5+5^2) \\ &= 2 \cdot 15 + 5^2 \cdot 2 \cdot 15 + \cdots + 5^6 \cdot 2 \cdot 15 \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát $A = 15 \cdot 2 \cdot (1 + 5^2 + 5^4 + 5^6)$. Mivel $1 + 5^2 + 5^4 + 5^6 \in \mathbb{N}$, így $A \vdots 15$. **(1 pont)**

b) Teljesül, hogy $5 + 5^2 + 5^3 = 5 + 25 + 125 = 155 = 5 \cdot 31$. **(1 pont)**
Innen

$$\begin{aligned} A &= 5 + 5^2 + 5^3 + 5^3 \cdot (5 + 5^2 + 5^3) + 5^7(1+5) \\ &= 31 \cdot 5 + 5^3 \cdot 31 \cdot 5 + 5^7 \cdot 6 \\ &= 31 \cdot (5 + 5^4) + 5^7 \cdot 6. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $31 \cdot (5+5^4) \vdots 31$ és $5^7 \cdot 6 \not\vdots 31$, így $A \not\vdots 31$. **(1 pont)**

c) A feltétel alapján $\frac{x-1}{0,8} = A$, ahonnan

$$x - 1 = 0,8 \cdot A = \frac{4}{5} \cdot 15 \cdot k = 4 \cdot 3 \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen

$$x + 2 = x - 1 + 3 = 4 \cdot 3 \cdot k + 3 = 3(4k+1),$$

ahol $4k + 1 \in \mathbb{N}$, így $(x+2) \vdots 3$. **(1 pont)**

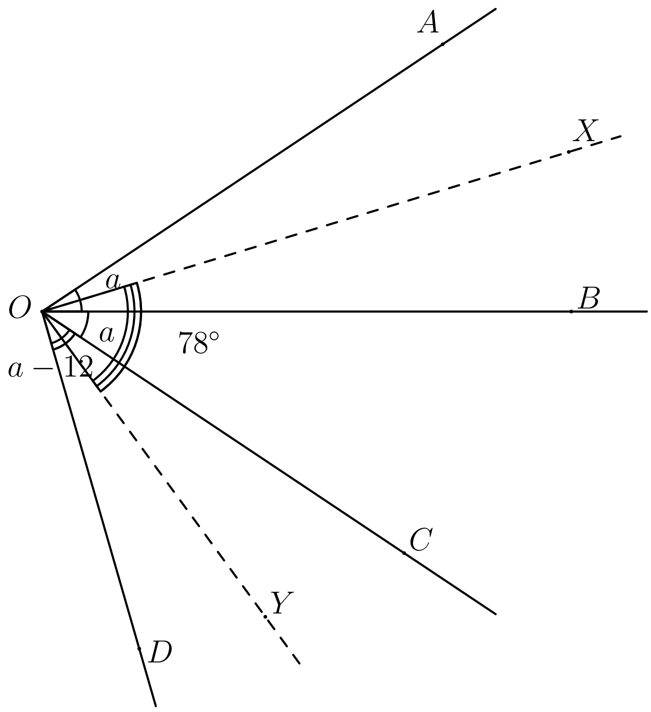
Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Az $\widehat{AOB}$ és a $\widehat{COD}$ nem egymás melletti szögek, belső tartományuknak nincs közös pontja, és OB az $\widehat{AOC}$ szögfelezője. Ha a $\widehat{COD}$ mértéke 12°-kal kisebb, mint a $\widehat{COB}$ mértéke, valamint az $\widehat{AOB}$ és $\widehat{COD}$ szögek OX, illetve OY szögfelezője 78°-os szöget zár be, akkor határozd meg az $\widehat{YOA}$ mértékét!

Matlap

Megoldás. Készítsük el az alábbi ábrát. **(2 pont)**



Mivel $\widehat{XOY} = 78°$, így az ábra jelöléseit használva a következőket írhatjuk:

$$\frac{a}{2} + a + \frac{a-12}{2} = 78° \quad \textbf{(2 pont)}$$

$$\frac{4a-12}{2} = 78° \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$4a - 12 = 156° \quad \textbf{(1 pont)}$$

Innen $4a = 168°$ és $a = 42°$. **(1 pont)**
Ezek alapján pedig

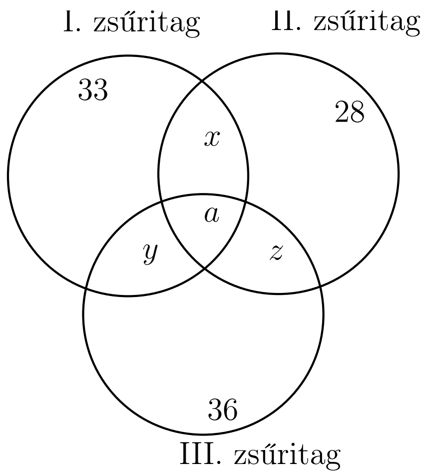
$$\widehat{YOA} = \widehat{YOX} + \widehat{XOA} = 78° + 21° = 99°. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Egy fotókiállítás 252 fotója közül háromtagú zsűri döntötte el, két forduló során, hogy melyek a legjobbak. Az első fordulóban mindegyik zsűri kijelölt 50, általa legjobban kedvelt fotót. Azok a fotók, melyet legalább ketten jelöltek, továbbjutottak a második fordulóba. Tudjuk, hogy az első zsűritag által választottakból 33, a második zsűritagéból 28, a harmadikéból pedig 36 nem került a legjobb fotók közé. Igazold, hogy a második fordulóba került fotók között volt legalább egy olyan fotó, melyet mindhárom zsűritag kijelölt! *Császár Sándor, Csíkmadaras*

Megoldás. Jelölje x, y, z és a az ábrának megfelelő halmazrészben levő fotók számát.



(**1 pont**)

(Ábra hiányában a feladat adatainak értelmezésére jár a pont)

Az első zsűritag által legalább két szavazatot kapott fotók száma: $50 - 33 = 17$. (**1 pont**)

A második zsűritag által legalább két szavazatot kapott fotók száma: $50 - 28 = 22$.

A harmadik zsűritag által legalább két szavazatot kapott fotók száma: $50 - 36 = 14$. (**1 pont**)

Ha egyetlen fotó sem kapott volna 3 szavazatot, akkor fennállna az (**1 pont**)

$$x + y + x + z + z + y = 17 + 22 + 14$$

összefüggés, vagyis $2x + 2y + 2z = 53$, tehát $x + y + z = \frac{53}{2} \notin \mathbb{N}$, ami lehetetlen. (**3 pont**)

Ezért $a > 0$, vagyis legalább egy fotó kapott 3 szavazatot. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

4. feladat. Az ABC háromszögben E és F az AB, illetve AC oldalak egy-egy pontja. Jelöljük az $\widehat{EFC}$ mértékét p-vel és az $\widehat{FCB}$ mértékét $4(x-1)$-gyel. Tudjuk, hogy teljesülnek a következő feltételek:

a) Ha egy számot 25%-kal csökkentünk, majd a kapott számot 5-ször egymásután p%-kal növeljük, akkor megkapjuk az eredeti szám 24-szeresét.

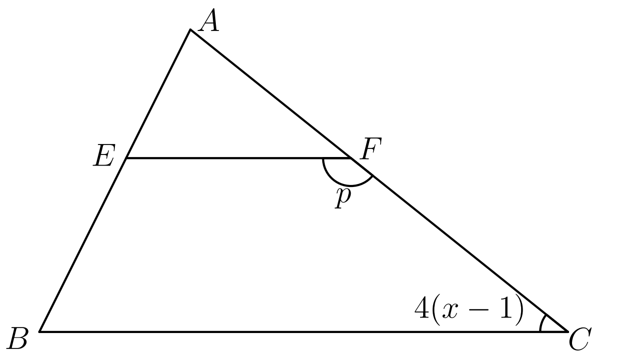
b) Tíz nemnulla különböző természetes szám összege 57 és x közülük a két legnagyobb szám összege.

Igazold, hogy az EF és BC egyenesek párhuzamosak!

Mátyás Beáta, Szatmárnémeti
Szász Szilárd, Marosszentkirály
Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. Jelöljük a-val az a) feltételben szereplő számot. Ha csökkentjük a-t 25%-kal, akkor megkapjuk az a szám 75%-át, vagyis

$$a \cdot \frac{75}{100} = \frac{3a}{4}.$$ (**0,5 pont**)



Növeljük az eredményt p%-kal:

$$\frac{3a}{4}+\frac{3a}{4}\cdot\frac{p}{100}=\frac{3a}{4}\left(1+\frac{p}{100}\right).$$ (**0,5 pont**)

Növeljük a kapott eredményt p%-kal:

$$\frac{3a}{4}\left(1+\frac{p}{100}\right)+\frac{3a}{4}\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}=\frac{3a}{4}\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Hasonlóan eljárva, a megnövelt szám

$$\frac{3a}{4}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^5.$$ (**1 pont**)

A feltételek alapján

$$\frac{3a}{4}\left(1+\frac{p}{100}\right)^5=24a,$$

tehát $\left(1+\frac{p}{100}\right)^5=\frac{24a}{1}\cdot\frac{4}{3a}$, vagyis $\left(1+\frac{p}{100}\right)^5=32.$ (**1 pont**)
Innen következik, hogy

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^5=2^5,$$

tehát $1+\frac{p}{100}=2$ (mivel $\left(1+\frac{p}{100}\right)\in\mathbb{N}$), és így $\frac{p}{100}=1$, ahonnan $p=100$. (**1 pont**)
Mivel $1+2+3+\cdots+10=55$, (**1 pont**)
és $57-55=2$, ezért vagy egy számot növeltünk kettővel, vagy két számot növeltünk egyel-egyel.

(**1 pont**)
Az első 8 szám nem növelhető, mivel a számok különbözőek kell legyenek a növelés után. Így az utolsó két szám 9 és 12, vagy 10 és 11 lehet. (**0,5 pont**)
Mindkét esetben $x=21$, (**0,5 pont**)
tehát $\widehat{EFC}=100°$, $\widehat{FCB}=4\cdot(21-1)=80°$. (**1 pont**)
A fenti eredmények alapján $\widehat{EFC}+\widehat{FCB}=180°$, és mivel az EF és BC egyeneseknek FC szelője, következik, hogy $EF\parallel BC$. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)
■